Całka nieoznaczona - wstęp

Pojęcia wstępne

Niech funkcja f (jednej zmiennej) będzie określona na pewnym przedziale X.

Definicja. Funkcję F nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f na przedziale X, jeżeli

$$F'(x) = f(x)$$

dla każdego $x \in X$.

Przykład. Dla podanych funkcji wyznaczyć funkcje pierwotne

a) $f(x) = x^3$, dla $x \in (-\infty, +\infty)$, b) $f(x) = \sin x$, dla $x \in (-\infty, +\infty)$.

Rozwiązanie. Zgodnie z definicją funkcji pierwotnej w obu przypadkach musimy znaleźć takie funkcje, których pochodnymi będą podane funkcje.

a) Funkcja $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = x^3$ na przedziale $(-\infty, +\infty)$, gdyż dla każdego x z tego przedziału $F'(x) = \left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$.

b) Funkcja $F(x) = -\cos x$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = \sin x$ na przedziale $(-\infty, +\infty)$, gdyż dla każdego x z tego przedziału $F'(x) = (-\cos x)' = \sin x$.

Można zapytać, czy wyznaczone w powyższych przykładach funkcje są jedynymi funkcjami pierwotnymi podanych funkcji. Okazuje się, że nie – łatwo stwierdzić, że każda funkcja, uzyskana z powyższych poprzez dodanie dowolnej stałej, będzie również spełniać warunek zapisany w definicji funkcji pierwotnej. Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie. Jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale X, to

1° funkcja $\Phi(x) = F(x) + C$, gdzie C jest dowolną stałą, jest również funkcją pierwotną funkcji f na przedziale X,

2° każdą funkcję pierwotną funkcji f można przedstawić w postaci $F(x) + C$.

Definicja. Zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f na przedziale X nazywamy *całką nieoznaczoną* funkcji f na przedziale X i oznaczamy symbolem

$$\int f(x)dx.$$

Możemy zatem zapisać

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

gdzie F jest funkcją pierwotną funkcji f, a C – dowolną stałą zwaną *stałą całkowania*. W zapisie tym funkcję $f(x)$ nazywamy *funkcją podcałkową*, a wyrażenie $f(x)dx$ – *wyrażeniem podcałkowym*.

Przykład. Wyznaczyć całki

a) $\int x^3 dx$, b) $\int \sin x\, dx$.

Rozwiązanie. Biorąc pod uwagę definicję całki nieoznaczonej oraz wcześniejszy przykład możemy zapisać

a) $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$,

b) $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

Z definicji funkcji pierwotnej oraz całki nieoznaczonej wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie. Jeżeli funkcja f ma funkcję pierwotną na przedziale X, wtedy dla każdego $x \in X$ zachodzą wzory:

1° $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$,

2° $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

Można zatem powiedzieć, że całkowanie jest działaniem odwrotnym do różniczkowania. W tym miejscu warto również zaznaczyć, że funkcje pierwotne niektórych funkcji elementarnych nie są funkcjami elementarnymi, czyli nie wszystkie całki można wyrazić w skończonej postaci przez funkcje elementarne. Przykładami takich całek są:

$$\int \frac{dx}{\ln x}\ , \quad \int \frac{\sin x}{x} dx\ , \quad \int \sin x^2 dx\ , \quad \int e^{-x^2} dx\ .$$

Obliczanie całek nieoznaczonych ze wzorów podstawowych oraz własności

Z powyższej definicji całki nieoznaczonej oraz znanych wzorów na pochodne wynikają następujące wzory podstawowe:

(1) $\int dx = x + C$,

(2) $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, \quad a \neq -1$,

(3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$,

(4) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$,

(5) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$,

(6) $\int e^x\, dx = e^x + C$,

(7) $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$,

(8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$,

(9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$,

(10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$,

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

Dodatkowo, przy obliczaniu całek często korzysta się z następujących własności:

(12) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$,

(13) $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$,

(14) $\int k f(x)dx = k\int f(x)dx$, k – dowolna stała.

Przykład. Obliczyć całki:

a) $\displaystyle\int (12x^3-3x^2+x-5)dx$, b) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x}+\sqrt[3]{x}-2\sin x\right)dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{x-2\sqrt[3]{x}}{3x^2}dx$, d) $\displaystyle\int \frac{5\cdot 6^x-2\cdot 3^x}{3^x}dx$,

e) $\displaystyle\int \frac{2-\cos^2 x}{\sin^2 x}dx$, f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$.

Rozwiązanie. Korzystając ze wzorów podstawowych oraz własności obliczamy:

a) $$\int (12x^3-3x^2+x-5)dx=12\int x^3\,dx-3\int x^2\,dx+\int x\,dx-5\int dx=$$
$$=12\cdot\frac{1}{4}x^4-3\cdot\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-5x+C=3x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2-5x+C,$$

b) $$\int\left(\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x}+\sqrt[3]{x^2}-2\sin x\right)dx=2\int x^{-3}dx-3\int\frac{1}{x}dx+\int x^{\frac{2}{3}}dx-2\int \sin x dx=$$
$$=2\cdot\frac{1}{-2}x^{-2}-3\ln|x|+\frac{1}{\frac{5}{3}}x^{\frac{5}{3}}-2\cdot(-\cos x)+C=-\frac{1}{x^2}-3\ln|x|+\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+2\cos x+C,$$

c) $$\int\frac{x+2\sqrt[3]{x}}{3x^2}dx=\int\frac{x}{3x^2}dx+\int\frac{2x^{\frac{1}{3}}}{3x^2}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x}\,dx+\frac{2}{3}\int x^{-\frac{5}{3}}\,dx=$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x|+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{2}{3}}+C=\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+C,$$

d) $$\int\frac{5\cdot 6^x-2\cdot 3^x}{3^x}dx=\int\frac{5\cdot 6^x}{3^x}dx-\int\frac{2\cdot 3^x}{3^x}dx=5\int\left(\frac{6}{3}\right)^x dx-2\int dx=$$
$$=5\int 2^x\,dx-2\int dx=\frac{5}{\ln 2}2^x-2x+C,$$

e) $$\int\frac{2-\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1+(1-\cos^2 x)}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=$$
$$=\int\frac{1}{\sin^2 x}\,dx+\int dx=-\operatorname{ctg} x+x+C,$$

f) $$\int\frac{x^2}{x^2+1}\,dx=\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=\int dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx=x-\operatorname{arctg} x+C.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Znaleźć całki:

1. $\int \left(9x^2 - 250x + 1\right) dx$,

2. $\int (t^5 - 2t^3 + 3t - 7) dt$,

3. $\int \left(5x^2 - 6x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right) dx$,

4. $\int \frac{(x^2-1)^2}{x} dx$,

5. $\int \frac{x^3-1}{x-1} dx$,

6. $\int \frac{(x^2-1)^2}{x} dx$,

7. $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx$,

8. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$,

9. $\int \left(\frac{2}{x} - 3x^2\sqrt{x} + \frac{5x}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$,

10. $\int \frac{x\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{x^2} dx$,

11. $\int (3 + 2\sqrt[4]{x})^3 dx$,

12. $\int (5^x - 3\cos x) dx$,

13. $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$,

14. $\int \frac{3 \cdot 2^x + 4\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} dx$,

15. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$,

16. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$,

17. $\int \left(\frac{-9}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sin^2 x} + 4\cos x + \frac{5}{1+x^2}\right) dx$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch